

Title	等角寫像ノ簡單ナーニノ例題
Author(s)	黒田, 稲夫
Citation	全国紙上数学談話会. 126 p.147-p.153
Issue Date	1937-04-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74488
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

563. 等角寫像ノ簡單ナ一ニノ例題

黒田 稻夫 (山形)

遠方ノ山々ニハ未ダ雪ガ残ツテキマスガ次第ニ芽ダム春
ノ陽氣ニ誘ハレルマヽニ次ノヌウナコトラ試ミラミマシタ。
前期學生ノ方マノ演習問題ノ一ツニデモナリマセウカ。

各平面上ノ二定点 $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $a > 0$ カラ
ノ距離ノ積ガ b^2 ニ等シイ点 P ノ軌跡即チ所謂 *Cassinian oval*
ヲ考ヘ点 P ヲ各デ表シマス

$$b^2 = AP \cdot A'P$$

或ハ

$$b^2 = |z - a| \cdot |z + a| = |z^2 - a^2|$$

デアリマスカラソコデ

$$w = z^2 - a^2$$

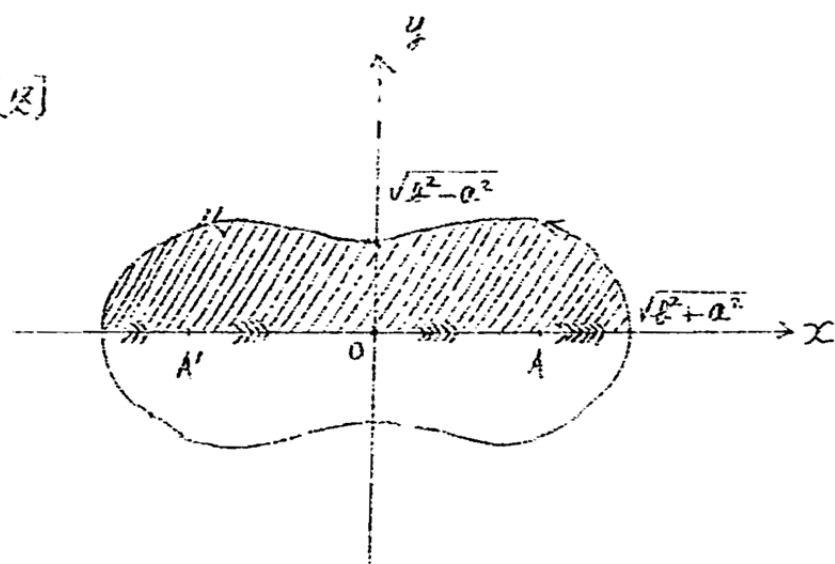
ナル函数ヲ作ツテミマス。然ルトキハコレト今一ツ $w' = \frac{w}{b^2}$
カラ得ラレル關係

$$(1) \quad w' = \frac{1}{b^2} (z^2 - a^2)$$

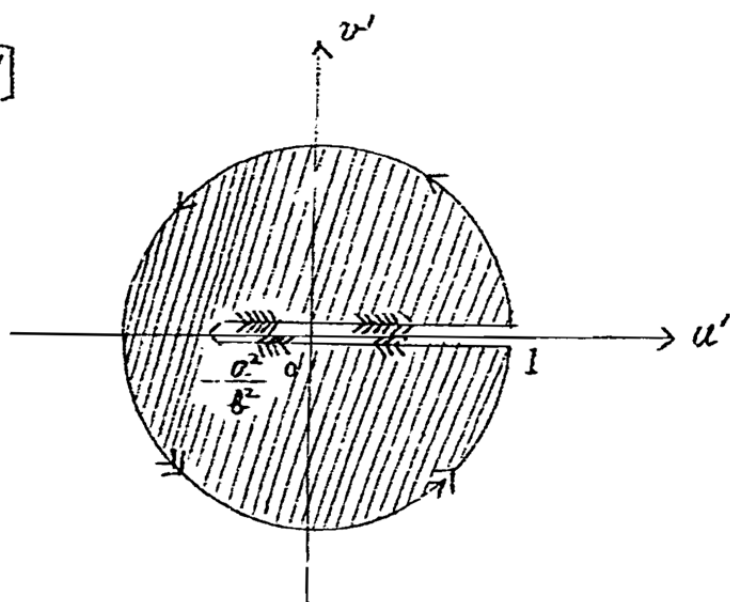
ニヨツテ $0 < b \leq a$ ナル場合ノ各平面ノ *oval* ノ内部
ヲ w' 平面ノ單位円内ヘ一對一ニ且ツ等角ニ寫像スルコトガ
出來マス。

次ニ $b > a$ ナル場合ニハ先ヅ (1) ニヨツテ次ノ寫像が
得ラレルコトハ容易ニ知ラレマス。

(2)



$[w']$

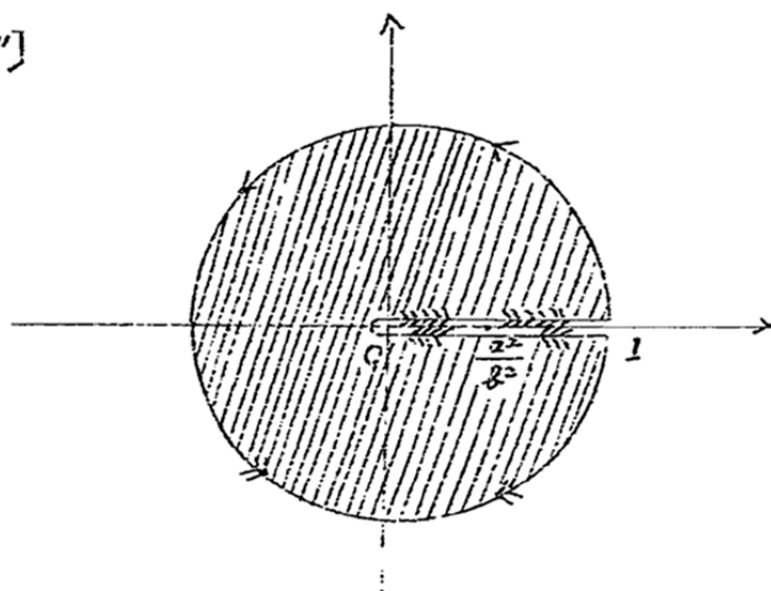


ヨコデ函数

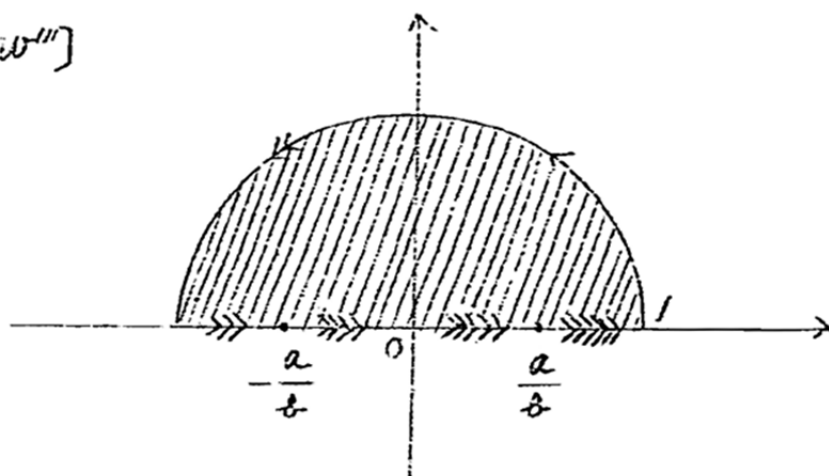
$$(2) \quad w'' = \frac{w' + \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} w' + 1}, \quad w''' = \sqrt{w''}$$

＝ヨツテ w' 平面ノ指楯セラレタ面ハテ次ノ如ク漸次変形シテ行キマス。

(w'')



(w''')

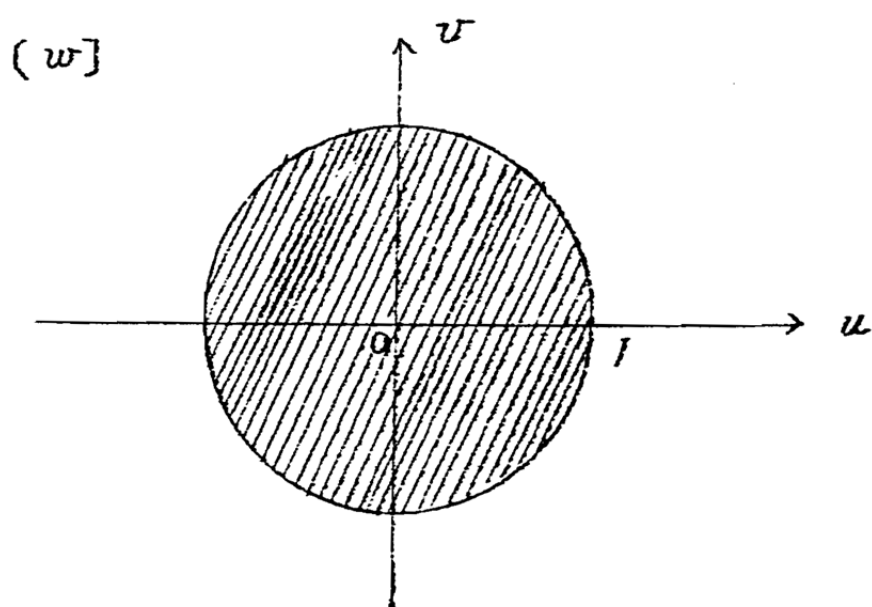
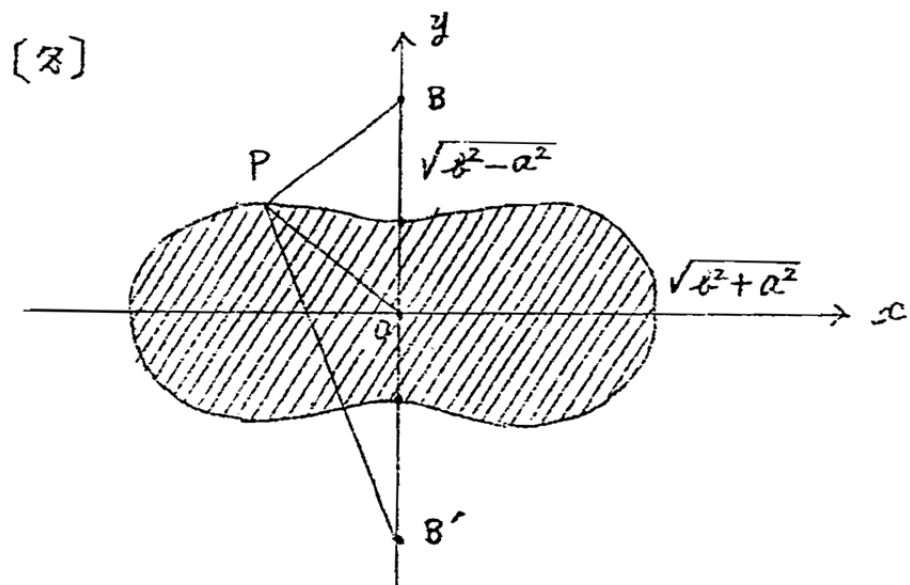


(1), (2) カラ w''' ト 各ノ関係ヲ求メマス

$$w''' = \frac{\frac{1}{b^2}(z^2 - a^2) + \frac{a^2}{b^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^4}(z^2 - a^2) + 1}} = \frac{bz}{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 + b^4}}$$

トナリマス。ソレ故 w''' ヲ w ト書改メマス 結局次ノ寫像
 可得ラレマス。

$$(3) \quad w = \frac{bz}{\sqrt{a^2 z^2 - a^4 + b^4}}, \quad b > a > 0$$



zが oval を画クトキ (3) = ヲリ wハ單位円ヲ画キマス
カラ此ノ場合両辺ノ 絶対値ヲ トツテ書直シテミマス

$$\frac{|z|}{\sqrt{\left| z - \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}i \right| \cdot \left| z + \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}i \right|}} = \frac{a}{b}$$

トナリマス,

ソレ故 今各平面上ニ於テ二点

$$B\left(0, \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}\right), \quad B'\left(0, -\frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}\right)$$

ヲ考ヘ oval ノ上ノ一ノ点ヲ P トシマス

$$(4) \quad \frac{OP}{\sqrt{BP \cdot B'P}} = \frac{a}{b} < 1$$

ナル關係が得ラレマス。

尚念ノタメニ一定点 $B(0, c)$, $B'(0, -c)$, $c > 0$ ヲ考ヘ

$$(4)' \quad \frac{OP}{\sqrt{BP \cdot B'P}} = c' < 1$$

ナル關係ヲ満足セシメル点 $P(x, y)$ ノ軌跡ノ方程式ヲ求メ
テミマス。先ヅ c, c' ヲ用ヒテ

$$a = \frac{cc'^2}{\sqrt{1 - c'^4}}, \quad b = \frac{cc'}{\sqrt{1 - c'^4}}$$

ナレモノヲ作リマス

$$c = \frac{\sqrt{b^4 - a^4}}{a}, \quad c' = \frac{a}{b} < 1$$

トナリマスカラ (4)' カラ

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^4}{b^4} \left\{ \left(x^2 + y^2 + \frac{b^4 - a^4}{a^2} \right)^2 - 4 \frac{b^4 - a^4}{a^2} y^2 \right\}$$

コレヲ書直シマス

$$(5) \quad (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4, \quad b > a > 0$$

即ち oval. の方程式トナルコトが看取セラレマス。

次=コレト關聯シテ今 w 平面上ノ楕圓 $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$,
 $a > b > 0$, 中心=關スル垂足曲線 $\rho^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$
ヲ考ヘテ ミマス。

$$\text{コレハ楕圓 } \rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad \text{或ハ}$$

$w_1 = b \cos \theta_1 + i a \sin \theta_1$, 又 $\rho_2 = \sqrt{ab}$ = 關スル
相及曲線ガ

$$\rho = \frac{ab}{\rho_1}$$

ナレ關係ガアリマスカラコレヨリ暗示ヲ受ケテ

$$w = \frac{ab}{w_1}$$

$$= \frac{ab}{b \cos \theta_1 - i a \sin \theta_1}$$

$$= \frac{ab}{b \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - i a \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)},$$

$$z = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1,$$

$$= \frac{-2abz}{(a-b)z^2 - (a+b)}$$

ナル函数ヲ作ツテミマス。ト之レ=ヨツテ次ノ寫像ガ得テレル
コト=ナリマス。

$$(6) \quad w = \frac{-2abz}{(a-b)z^2 - (a+b)}, \quad a > b > 0$$

